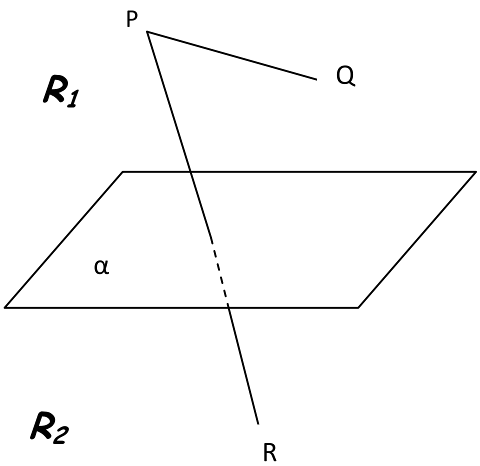
Axioma de división del espacio:

Todo plano del espacio determina en éste dos regiones tales que:

- Cada punto del espacio pertenece a una de las dos regiones o al plano
- Dos puntos de una misma región determinan un segmento que no corta al plano.
- Dos puntos de distinta región determinan un segmento que corta al plano.



Semiespacio:

Definición: Al conjunto formado por los puntos de un plano y todos los puntos de una de las dos regiones que el plano determina en el espacio se llama SEMIESPACIO.

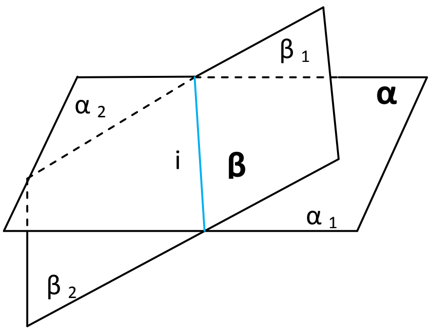
$\alpha \cup R_1 = E_1 \qquad \alpha \cup R_2 = E_2$

$E_1 \ y \ E_2$ son semiespacios opuestos , α es el borde o frontera de $E_1 \ y \ E_2$

$E_1 \cap E_2 = \alpha \qquad E_1 \cup E_2 = E$

Notación: $\alpha(A) \quad (\alpha, A) \quad IRT(A) \quad (IRT, A)$

Ángulos diedros:



$\alpha(\beta_1) \cap \beta(\alpha_1) = \widehat{\alpha_1\beta_1}$ *ángulo diedro convexo*

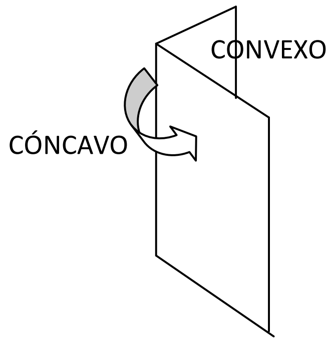
Definición: Se llama ángulo diedro convexo a la intersección de dos semiespacios cuyos bordes se cortan o coinciden.

Elementos: $\alpha_1 \quad y \quad \beta_1 \quad son\ las\ caras\ del\ diedro\ (semiplanos)$
$i \quad es\ la\ arista\ del\ diedro\ (recta)$

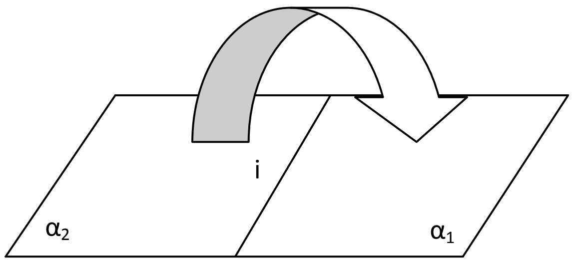
Observación: Dos planos secantes dividen al espacio en 4 diedros convexos.

$$\alpha_1\hat{}\beta_1 ,\ \alpha_1\hat{}\beta_2 ,\ \alpha_2\hat{}\beta_2 ,\ \alpha_2\hat{}\beta_1$$

Ángulo diedro cóncavo: Se llama ángulo diedro cóncavo al formado por las caras del diedro convexo y todos los puntos exteriores a él.



Diedro llano: Si las caras de un diedro son semiplanos opuestos, a cada semiespacio que tiene por borde el plano que los contiene se llama diedro llano.

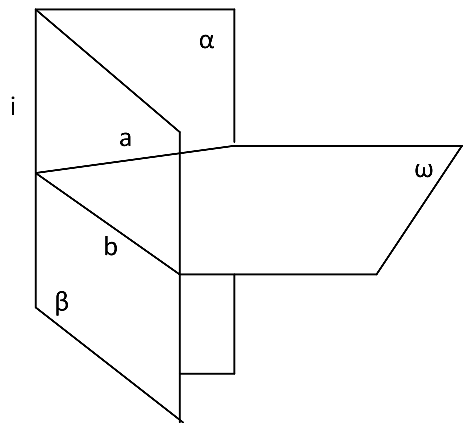


Diedros consecutivos: Dos diedros son consecutivos cuando tienen una cara común y las otras en semiespacios opuestos con respecto al plano que contiene la cara común.

Diedros adyacentes: Dos diedros son adyacentes cuando tienen una cara común y las caras no comunes son semiplanos opuestos.

Diedros opuestos por la arista: Sus caras son semiplanos respectivamente opuestos.

Rectilíneo de un diedro: Es el ángulo plano que resulta de la intersección de un diedro con un plano perpendicular a su arista



$$\alpha \cap \beta = i$$

$$\omega \perp i \Rightarrow \begin{cases} \omega \perp \alpha \\ \omega \perp \beta \end{cases}$$

$$\omega \cap \alpha = a$$

$$\omega \cap \beta = b$$

$$\widehat{\alpha_1 \beta} \cap \omega = \widehat{ab} \ (rectilíneo)$$

El ángulo diedro que forman dos planos se mide por el rectilíneo correspondiente.

Clasificación de los ángulos diedros:

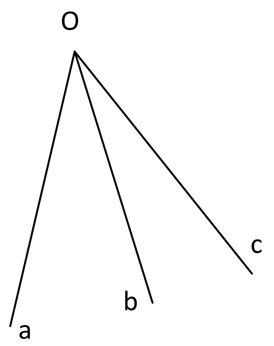
- Se dice que un diedro es recto, agudo u obtuso según que su rectilíneo sea un ángulo recto, agudo u obtuso.
- Si un diedro es recto, los planos que contienen sus caras son perpendiculares.

Igualdad de diedros: Dos diedros son iguales si y sólo si tienen iguales sus rectilíneos.

Desigualdad de diedros: Un diedro es menor que otro si y sólo si el rectilíneo del primero es menor que el del segundo.

Ángulos triedros:

Definición: Dadas tres semirrectas con origen común, no coplanares, se llama ángulo triedro a la intersección de los tres semiespacios cada uno de los cuales tiene como borde el plano determinado por dos de las semirrectas y contiene a la tercera.



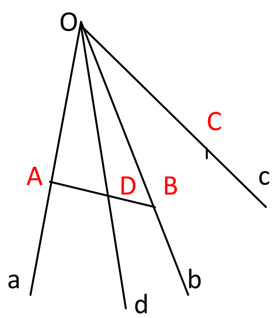
$$ab(c)\cap bc(a)\cap ac(b)=O\overset{\wedge}{abc}$$

Elementos: O es el vértice del triedro. Las semirrectas a, b y c son aristas del triedro. Los ángulos convexos $\widehat{ab},\widehat{bc},\widehat{ca}$ son las caras del triedro.

<u>Propiedades de las caras de un diedro:</u>

Recordamos: en un triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos

<u>Propiedad</u>: En todo triedro una cara es menor que la suma de las otras dos.



Hipótesis: $O\overset{\wedge}{abc}\ triedro$
$\widehat{ab}\ es\ la\ mayor\ de\ las\ caras$

Tesis: $\widehat{ab}\langle\widehat{bc}+\widehat{ca}$

Demostración:

Transporto $\widehat{ac}$ sobre $\widehat{ab}$, tomo semirrecta Od interior a $\widehat{ab}$ tal que $\widehat{ac}=\widehat{ad}$.

Tomo $A\in a\ y\ B\in b\ y\ D=AB\cap Od$. Tomo $C\in c\ tal\ que\ seg(OD)=seg(OC)$

$$\left.\begin{array}{l} segmento\ AO\ común \\ seg(OC) = seg(OD) \\ \widehat{ad} = \widehat{ac} \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{D}O = A\overset{\triangle}{C}O \Rightarrow seg(AD) = seg(AC)$$

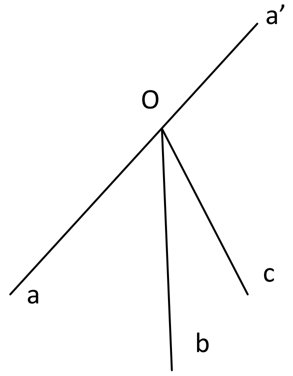
$$En\ A\overset{\triangle}{B}C \text{ se } cumple\ que: seg(AB) < seg(AC) + seg(BC) \Rightarrow \underbrace{seg(AB) - seg(AC)}_{seg(DB)} < seg(BC)$$

$$\Rightarrow seg(BC) > seg(DB) \Rightarrow \widehat{bc} > \widehat{db} \underset{sumo\ \widehat{ca}}{\Rightarrow} \widehat{bc} + \widehat{ca} > \underbrace{\widehat{db} + \widehat{ca}}_{\widehat{ab}}$$

Corolario: En todo triedro una cara es mayor que la diferencia de las otras dos

$$\widehat{bc} > \widehat{ab} - \widehat{ac}$$

Propiedad: En todo triedro la suma de las caras es menor que 4 rectos



Hipótesis: $\widehat{Oabc}\ triedro, \widehat{bc}, \widehat{ab}\ y\ \widehat{ac}\ caras$ Tesis: $\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{ac} < 4R$

Demostración:

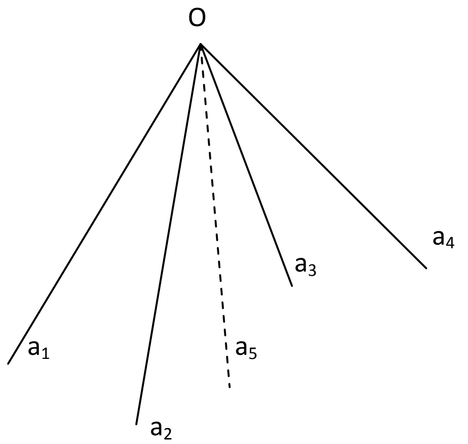
Trazo a' la semirrecta opuesta de a. Si a, b y c no coplanares, entonces a', b y c no coplanares, entonces $\widehat{Oa'bc}\ triedro$

Por teorema anterior $\widehat{bc} < \widehat{ba'} + \widehat{ca'} \underset{sumo\ \widehat{ab}+\widehat{ac}}{\Rightarrow} \widehat{ab} + \widehat{ac} + \widehat{bc} < \underbrace{\widehat{ab} + \widehat{ba'}}_{2R} + \underbrace{\widehat{ac} + \widehat{ca'}}_{2R} \Rightarrow \widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{ac} < 4R$

Es necesario y suficiente que se cumplan estas dos propiedades para que exista triedro.

Ángulo poliedro convexo:

Dadas n semirrectas con origen común, tomadas en un cierto orden, tales que tres consecutivas no sean coplanares, se llama ángulo poliedro convexo a la intersección de los semiespacios que tienen por borde el plano determinado por dos semirrectas consecutivas y contiene a las n-2 restantes.



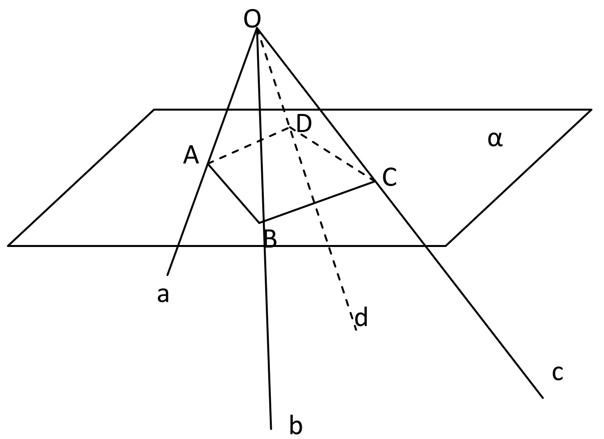
Elementos: O es el vértice. Las semirrectas $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ son las aristas y los ángulos $\widehat{a_1 a_2}, \widehat{a_2 a_3}, \ldots\ldots\ldots$ son las caras.

Se cumplen las propiedades que demostramos para las caras de un triedro:

- En todo ángulo poliedro una cara es menor que la suma de las restantes
- La suma de todas sus caras es menor que 4 rectos.

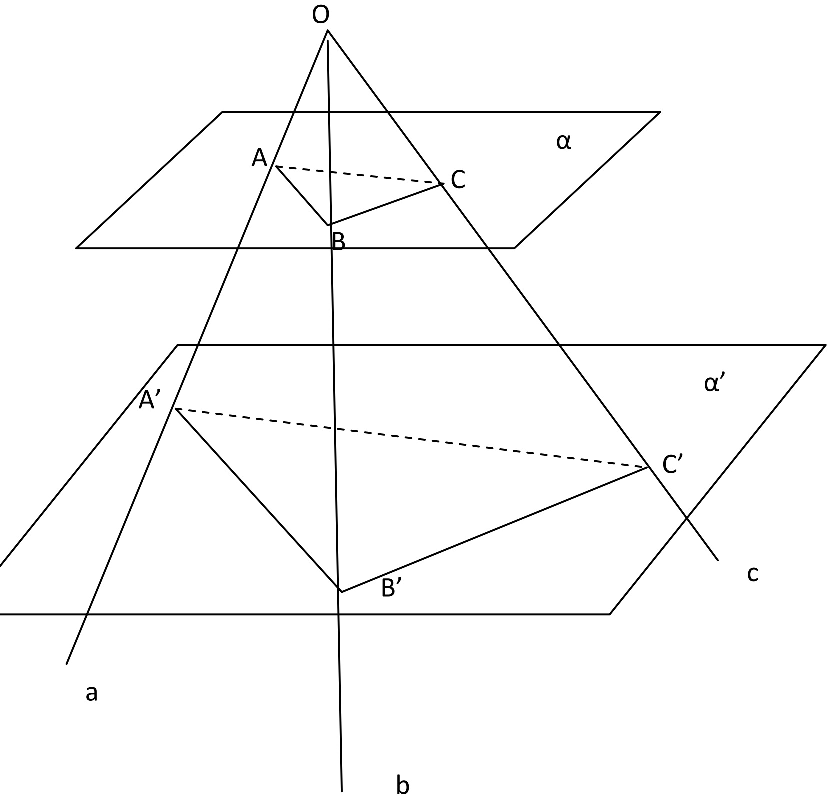
Secciones planas de un ángulo poliedro:

La intersección de un ángulo poliedro con un plano que corte todas sus aristas y no pase por el vértice es un POLÍGONO CONVEXO que tiene tantos vértices como aristas tiene el ángulo poliedro.



Poliedros convexos:

Obtención:



$\alpha \cap O\widehat{abc} = \overset{\triangle}{ABC}$

$\alpha(O) \cap O\widehat{abc} = ABCD \quad poliedro\ de\ 4\ caras: TETRAEDRO$

Si luego al tetraedro lo seccionamos con otro plano α’ que corta a tres aristas concurrentes, entonces obtengo dos poliedros convexos: un TETRAEDRO y otro de 5 caras (PENTAEDRO).

Por secciones análogas se pueden obtener poliedros de 6 caras (HEXAEDROS), 7 caras (HEPTAEDROS), 8 caras (OCTAEDRO), etc.

Conclusión: Un poliedro convexo tiene por lo menos 4 caras.

Definición:

Dado un número finito de polígonos (n mayor o igual que 4) situados en planos diferentes y tales que cada lado de uno de ellos cualquiera pertenezca a otro y solo otro de los polígonos mencionados, se llama

POLIEDRO CONVEXO a la intersección de los semiespacios que tienen por borde el plano de cada polígono y contiene a los restantes.

Elementos: Los vértices de los polígonos son los **vértices** del poliedro. Los lados de los polígonos se llaman **aristas** del poliedro. Los polígonos son las **caras** del poliedro.

Superficie poliédrica: Es el conjunto de puntos que pertenecen a los polígonos que definen un poliedro.

Teorema de Euler:

En todo poliedro convexo la suma del número de caras y del número de vértices excede en dos unidades al número de aristas.

c + v = a + 2

POLIEDROS REGULARES:

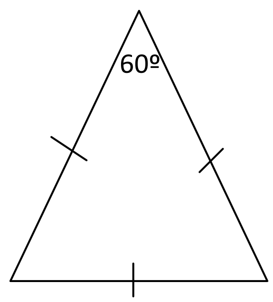
Recordamos: polígono regular es aquel que tiene los lados y ángulos congruentes.

Definición: Se llama poliedro regular a todo poliedro convexo cuyas caras son polígonos regulares congruentes y en cuyos vértices concurren el mismo número de caras.

Existencia de sólo 5 poliedros regulares:

Mientras existen polígonos regulares de un número cualquiera de lados, veremos que el número de caras de un poliedro regular no puede ser cualquiera. Como en cada vértice de un poliedro tenemos un ángulo poliedro y la suma de las caras de un ángulo poliedro debe ser menor que 4 rectos, tenemos una limitación.

Poliedros regulares con caras triangulares:



En cada vértice pueden concurrir como mínimo tres caras y como máximo 5 caras:

60º x 3 = 180º < 4R
60º x 4 = 240º < 4R
60º x 5 = 300º < 4R
60º x 6 =360º no es menor que 4R

1) Tres caras por vértice:

$a = \frac{3v}{2}$ (3v porque a cada vértice concurren 3 aristas y dividido 2 porque cada arista tiene 2 vértices)

$\Rightarrow v = \frac{2}{3}a$

$a = \frac{3c}{2}$ (porque cada cara tiene 3 aristas, pero cada arista es común a 2 caras)

$\Rightarrow c = \frac{2}{3}a$

Euler: $c + v = a + 2$

$\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a = a + 2 \Rightarrow \frac{4}{3}a = a + 2 \Rightarrow 4a = 3a + 6 \Rightarrow 4a - 3a = 6 \Rightarrow a = 6$

$v = \frac{2}{3} \times 6 \Rightarrow v = 4 \quad y \quad c = 4$

TETRAEDO REGULAR

2) <u>Cuatro caras por vértice:</u>

$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{4v}{2} \Rightarrow a = 2v \Rightarrow v = \frac{a}{2} \\ a = \frac{3c}{2} \Rightarrow c = \frac{2a}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{2a}{3} = a + 2 \Rightarrow \frac{3a + 4a}{6} = a + 2 \Rightarrow 7a = 6a + 12 \Rightarrow 7a - 6a = 12 \Rightarrow a = 12$$

$v = 6, \quad c = \frac{2}{3} \times 12 \Rightarrow c = 8$

OCTAEDRO REGULAR

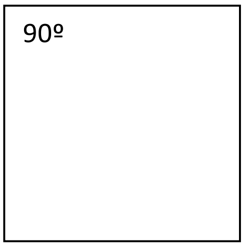
3) <u>Cinco caras por vértice:</u>

$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{5v}{2} \Rightarrow v = \frac{2a}{5} \\ a = \frac{3c}{2} \Rightarrow c = \frac{2a}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2a}{5} + \frac{2a}{3} = a + 2 \Rightarrow \frac{6a + 10a}{15} = a + 2 \Rightarrow 16a = 15a + 30 \Rightarrow 16a - 15a = 30 \Rightarrow a = 30$$

$v = \frac{2}{5} \times 30 \Rightarrow v = 12, \quad c = \frac{2}{3} \times 30 \Rightarrow c = 20$

ICOSAEDRO REGULAR

Poliedros regulares con caras cuadradas:



90º x 3 = 270º < 4R

90º x 4 = 360º no es menor que 4R

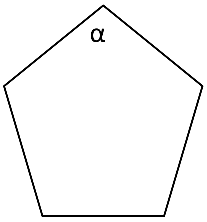
Entonces hay un sólo poliedro regular de caras cuadradas

$$\left.\begin{array}{l} a=\dfrac{3v}{2}\Rightarrow v=\dfrac{2a}{3} \\ a=\dfrac{4c}{2}\Rightarrow c=\dfrac{a}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2a}{3}+\frac{a}{2}=a+2\Rightarrow \frac{4a+3a}{6}=a+2\Rightarrow 7a=6a+12\Rightarrow 7a-6a=12\Rightarrow a=12$$

$$v=\frac{2}{3}\times 12\Rightarrow v=8\,,\quad c=6$$

HEXAEDRO REGULAR O CUBO

Poliedros regulares con caras pentagonales:



La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es igual a (n-2) llanos
5α = 3 x 180º, 5α = 540º, α = 540º/5, entonces α = 108º

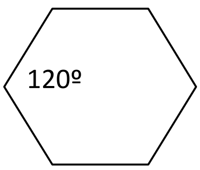
108º x 3 = 324º < 4R
108º x 4 = 432º no es menor que 4R
Entonces, hay un solo poliedro regular con caras pentagonales.

$$\left.\begin{array}{l} a=\dfrac{3v}{2}\Rightarrow v=\dfrac{2a}{3} \\ a=\dfrac{5c}{2}\Rightarrow c=\dfrac{2a}{5} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2a}{3}+\frac{2a}{5}=a+2\Rightarrow \frac{10a+6a}{15}=a+2\Rightarrow 16a=15a+30\Rightarrow 16a-15a=30\Rightarrow a=30$$

$$v=\frac{2}{3}\times 30\Rightarrow v=20\,,\quad c=\frac{2}{5}\times 30\Rightarrow c=12$$

DODECAEDRO REGULAR

Poliedros regulares con caras hexagonales:



120º x 3 = 360º no es menor que 4 rectos

Entonces, no existen poliedros regulares con caras de más de 5 lados

RESUMEN:

	a	v	c	
TETRAEDRO REGULAR	**6**	**4**	**4**	
OCTAEDRO REGULAR	**12**	**6**	**8**	*caras triangulares*
ICOSAEDRO REGULAR	**30**	**12**	**20**	
HEXAEDRO REGULAR	**12**	**8**	**6**	$\rightarrow$ *caras cuadradas*
DODECAEDRO REGULAR	**30**	**20**	**12**	$\rightarrow$ *caras pentagonales*

Para poder ver los poliedros, así como sus desarrollos pueden descargar el programa Poly. La siguiente es la dirección: http://www.peda.com/polypro/

Tienen que ir a: downloads, y luego: Download Poly pro 1.12 for windows.